Études mathématiques
Niveau moyen
Épreuve 2

Vendredi 5 mai 2017 (matin)

1 heure 30 minutes

Instructions destinées aux candidats

- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour cette épreuve.
- Un exemplaire non annoté du **livret de formules pour le cours d'études mathématiques NM** est nécessaire pour cette épreuve.
- Répondez à toutes les questions dans le livret de réponses fourni.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d'examen est de **[90 points]**.

2217 – 7408

Répondez à **toutes** les questions dans le livret de réponses fourni. Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page. On vous recommande d'indiquer votre raisonnement autant que possible. Lorsque la réponse est fausse, certains points seront accordés si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. Les solutions obtenues à l'aide de calculatrices à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse.

1. [Note maximale : 16]

Dans un établissement scolaire, tous les élèves inscrits en études mathématiques NM ont eu à passer un test. Le test comptait quatre questions, chacune portant sur un thème différent du programme. La qualité de chaque réponse a été classée comme satisfaisante ou insatisfaisante. Chaque élève devait répondre seulement à trois des quatre questions, chacune sur une feuille séparée.

Le tableau ci-dessous montre le nombre de réponses satisfaisantes et insatisfaisantes pour chaque question.

		Thème du programme				
		Calcul différentiel	**Probabilités**	**Géométrie**	**Logique**	**Total**
Qualité de la réponse	**Satisfaisante**	10	16	20	14	60
	Insatisfaisante	8	6	10	6	30
	Total	18	22	30	20	90

(a) Si l'enseignant choisit une réponse au hasard, trouvez la probabilité

(i) qu'il s'agisse d'une réponse à la question portant sur le calcul différentiel ;

(ii) qu'il s'agisse d'une réponse satisfaisante à la question portant sur le calcul différentiel ;

(iii) qu'il s'agisse d'une réponse satisfaisante, étant donné qu'il s'agit d'une réponse à la question portant sur le calcul différentiel. [6]

(b) L'enseignant regroupe les réponses par thème et choisit deux réponses à la question portant sur la logique. Trouvez la probabilité que les deux soient insatisfaisantes. [3]

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 1)

Un test d'indépendance du χ^2 est effectué pour les données du tableau, au seuil de signification de 5%.

(c) Indiquez l'hypothèse nulle pour ce test. [1]

(d) Montrez que l'effectif théorique correspondant aux réponses satisfaisantes à la question portant sur le calcul différentiel est 12. [1]

(e) Écrivez le nombre de degrés de liberté pour ce test. [1]

(f) Utilisez votre calculatrice à écran graphique pour trouver la statistique du χ^2 pour ces données. [2]

La valeur critique pour ce test est $7{,}815$.

(g) Indiquez la conclusion de ce test d'indépendance du χ^2. Donnez une raison justifiant votre réponse. [2]

2. [Note maximale : 11]

Considérez ces trois énoncés, dans lesquels x est un entier naturel.

p : x est un facteur de 60
q : x est un multiple de 4
r : x est un multiple de 5

(a) Écrivez sous forme symbolique l'énoncé composé

« Si x est un facteur de 60 alors x est un multiple de 5 ou x n'est pas un multiple de 4. » [3]

(b) Écrivez en mots l'énoncé composé $\neg r \wedge (p \veebar q)$. [3]

(c) **Copiez** la table de vérité suivante et complétez les trois dernières colonnes. [3]

p	q	r	$\neg r$	$p \veebar q$	$\neg r \wedge (p \veebar q)$
V	V	V			
V	V	F			
V	F	V			
V	F	F			V
F	V	V			
F	V	F			
F	F	V			
F	F	F			

(d) Indiquez pourquoi l'énoncé composé $\neg r \wedge (p \veebar q)$ n'est pas une contradiction logique. [1]

(e) Une des rangées de la table de vérité de la partie (c) est donnée ci-dessous.

p	q	r	$\neg r$	$p \veebar q$	$\neg r \wedge (p \veebar q)$
V	F	F			V

Écrivez **une** valeur de x qui satisfait ces valeurs de vérité. [1]

3. [Note maximale : 18]

Le directeur d'une usine de fabrication de classeurs a enregistré le nombre de classeurs produits par l'usine (en milliers) et les coûts de production (en milliers d'euros) au cours de six mois consécutifs.

	Janvier	**Février**	**Mars**	**Avril**	**Mai**	**Juin**
Classeurs produits, x (en milliers)	10	15	22	30	28	21
Coûts de production, C (en milliers d'euros)	35	40	60	72	68	55

(a) Dessinez un diagramme de dispersion pour ces données. Utilisez une échelle de $2\,\text{cm}$ pour 5000 classeurs sur l'axe horizontal et de $2\,\text{cm}$ pour $10\,000$ euros sur l'axe vertical. [4]

(b) Écrivez, pour cet ensemble de données,

(i) le nombre moyen de classeurs produits, $\bar{x}$;

(ii) le coût de production moyen, $\bar{C}$. [2]

(c) Légendez le point $\text{M}\left(\bar{x}, \bar{C}\right)$ sur le diagramme de dispersion. [1]

(d) Utilisez votre calculatrice à écran graphique pour trouver le coefficient de corrélation de Pearson, r. [2]

(e) Indiquez une raison pour laquelle la droite de régression C en fonction de x est appropriée pour modéliser la relation entre ces variables. [1]

(f) Utilisez votre calculatrice à écran graphique pour trouver l'équation de la droite de régression C en fonction de x. [2]

(g) Dessinez la droite de régression C en fonction de x sur le diagramme de dispersion. [2]

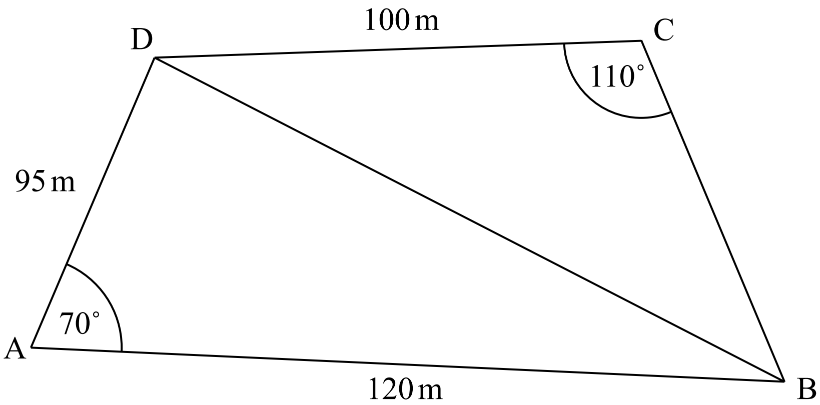
Chaque mois, l'usine vend tous les classeurs produits. Chaque classeur est vendu au prix de $2{,}99$ euros.

(h) Utilisez l'équation de la droite de régression pour estimer le nombre minimum de classeurs que doit vendre l'usine au cours d'un mois afin de dépasser ses coûts de production pour le mois en question. [4]

4. [Note maximale : 15]

Le quadrilatère ABCD représente un parc, où $\mathrm{AB} = 120\,\mathrm{m}$, $\mathrm{AD} = 95\,\mathrm{m}$ et $\mathrm{DC} = 100\,\mathrm{m}$. L'angle DAB mesure 70° et l'angle DCB mesure 110°. Ces informations sont montrées dans le diagramme suivant.

la figure n'est pas à l'échelle



Un sentier droit à travers le parc joint les points B et D.

(a) Trouvez la longueur du sentier BD. [3]

(b) Montrez que l'angle DBC mesure $48{,}7^\circ$, correct à trois chiffres significatifs près. [3]

(c) Trouvez l'aire du parc. [4]

Un nouveau sentier, CE, doit être aménagé de façon à ce que E soit le point sur BD le plus près de C.

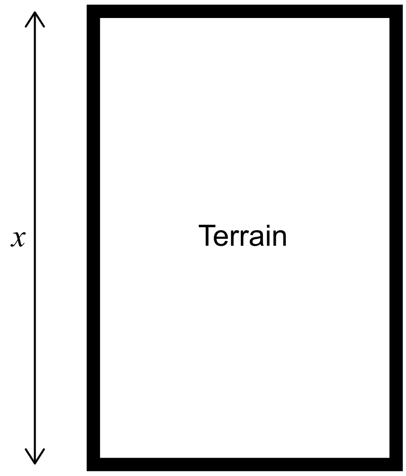
(d) Trouvez la longueur du sentier CE. [2]

La section du parc représentée par le triangle DCE sera utilisée pour une course de charité. Une piste sera tracée le long des côtés de cette section.

(e) Calculez la longueur totale de la piste. [3]

5. [Note maximale : 14]

Violeta planifie de faire pousser des fleurs dans un terrain rectangulaire. Elle met en place une clôture pour délimiter le périmètre du terrain et utilise 200 mètres de clôture. La longueur du terrain est de x mètres.



(a) Montrez que la largeur du terrain, en mètres, est donnée par $100 - x$. [1]

(b) Écrivez l'aire du terrain en fonction de x. [1]

Violeta place la clôture de sorte que l'aire du terrain soit maximale.

(c) Trouvez la valeur de x qui rend l'aire du terrain maximale. [2]

En vendant ses fleurs, Violeta gagne 2 levs bulgares (BGN) par mètre carré de terrain.

(d) Montrez que Violeta gagne $5\,000$ BGN en vendant les fleurs cultivées sur le terrain. [2]

Violeta désire investir ses $5\,000$ BGN.

(e) Une banque offre un taux d'intérêt nominal annuel de $4\,\%$, composé **semestriellement**.

(i) Trouvez la somme d'argent que Violeta aurait après 6 ans. Donnez votre réponse correcte à deux décimales près.

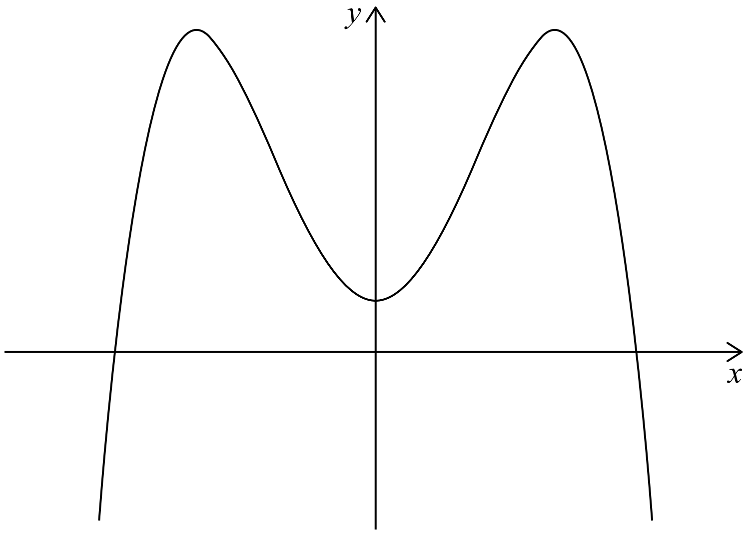
(ii) Trouvez le temps que cela prendrait pour que l'intérêt gagné atteigne $2\,000$ BGN. [6]

Une autre banque offre un taux d'intérêt de $r\,\%$ composé **annuellement**, qui lui permettrait de doubler son argent en 12 ans.

(f) Trouvez la plus petite valeur possible pour r. [2]

6. [Note maximale : 16]

Considérez la fonction $f(x) = -x^4 + ax^2 + 5$, où a est une constante. Une partie de la représentation graphique de $y = f(x)$ est montrée ci-dessous.



(a) Écrivez l'ordonnée à l'origine de la représentation graphique. [1]

(b) Trouvez $f'(x)$. [2]

On sait qu'au point où $x = 2$, la tangente à la représentation graphique de $y = f(x)$ est horizontale.

(c) (i) Montrez que $a = 8$.

(ii) Trouvez $f(2)$. [4]

Il y a deux autres points sur la représentation graphique de $y = f(x)$ auxquels la tangente est horizontale.

(d) Écrivez

(i) les abscisses de ces deux points ;

(ii) les intervalles où la pente de la représentation graphique de $y = f(x)$ est positive. [4]

(e) Écrivez l'image de $f(x)$. [2]

(f) Écrivez le nombre de solutions possibles à l'équation $f(x) = 5$. [1]

(g) L'équation $f(x) = m$, où $m \in \mathbb{R}$, admet quatre solutions. Trouvez les valeurs possibles de m. [2]